Kinematische Geometrie einer speziellen zweiparametrigen Bewegung

Dizioglu, Bekir

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 37, 1985, S.131-139

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Kinematische Geometrie einer speziellen zweiparametrigen Bewegung

Von **Bekir Dizioğlu***, Wolfenbüttel

(Eingegangen am 15.11.1985)

Übersicht

In dieser Arbeit wurde gezeigt, daß der geometrische Ort der möglichen Schraubachsen in einer Verbindung dreier Körper mit zwei Drehpaaren ein Cayley-Plücker Zylindroid ist. Außerdem wurde festgestellt, daß der geometrische Ort der parabolischen Punkte, eine Ebene $z = h$ und eine Fläche $F(X,Y,Z) = 0$ fünfter Ordnung, erfüllen. Die Bewegung ist vollständig definiert durch die drei Invarianten $h, \alpha, d\phi/d\theta$. Die Eigenschaften zweiter Ordnung sind bestimmt durch vier invariante Größen: h, α und $d\phi/d\theta$, $d^2\phi/d^2\theta$.

Summary

Instantaneous kinematics of a special two parameter motion: The instantaneous kinematics of a rigid body when it is driven by a revolute-revolute crank have been presented. The premise of the analysis is that the Displacement of a body driven by a revolute-revolute crank is governed by two parameters, angular rotations about the axes of individual revolutes- and, therefore, the locus of a point in that body is a surface of two parameters. It has been shown that the instantaneous screw axes associated with the motion of a cylindroid. Secondly, the locus of all parabolic points associated with the instantaneous motion of a revolute-revolute crank consists of a plane and a fifth – order surface.

In einer früher erschienenen Arbeit [1] wurden die verschiedenen Gelenkkombinationen der miteinander gelenkig verbundenen dreier Körper im Hinblick auf die Entartung des Dreischraubenachsensatzes eingehend untersucht. Dieser Satz wird bekanntlich im Falle der ebenen Bewegung als Aronhold'scher Dreimomentanpolsatz bezeichnet. Diese Pole liegen danach auf einer Geraden.

In der folgenden Arbeit wird nun die Verbindung dreier Körper mit zwei räumlich angeordneten Drehpaaren nochmals eingehend untersucht und eine Erweiterung bezüglich der Differentialelemente zweiter Ordnung der bei der Bewegung entstehenden Fläche angegeben. Die Elemente erster und zweiter Ordnung sind hinsichtlich des relativen Übertragungsverhaltens dieser Verbindung von Bedeutung, und daher spielen sie in der räumlichen Getriebelehre eine ausschlaggebende Rolle. Es wird sich her-

*) Prof. Dr.-Ing. B. Dizioğlu, Institut für Getriebelehre und Maschinendynamik, Technische Universität Braunschweig

ausstellen, daß dazu außer der Einführung des Zylindroids noch zusätzlich die Einführung einer Fläche fünfter Ordnung notwendig wird. Es wird angeregt, daß diese Fläche weiter untersucht werden sollte.

1. Lineare Transformation

In Bild 1 bewegen sich die drei starren Körper relativ zueinander um die Achsen S_A und S_B. Der Kreuzungsabstand der beiden Achsen sind mit 2h und der Kreuzungswinkel mit 2α bezeichnet. Außerdem: ϕ und θ sind Drehungswinkel um die jeweiligen Achsen S_A und S_B. Wir bringen ein Koordinatensystem am Mittelpunkt der Strecke 2h und lassen die Z-Achse längs des kürzesten Lotes der beiden Drehachsen legen. XZ- und YZ-Ebenen dieses Koordinatensystems seien die winkelhalbierenden Ebenen der beiden Drehachsen.

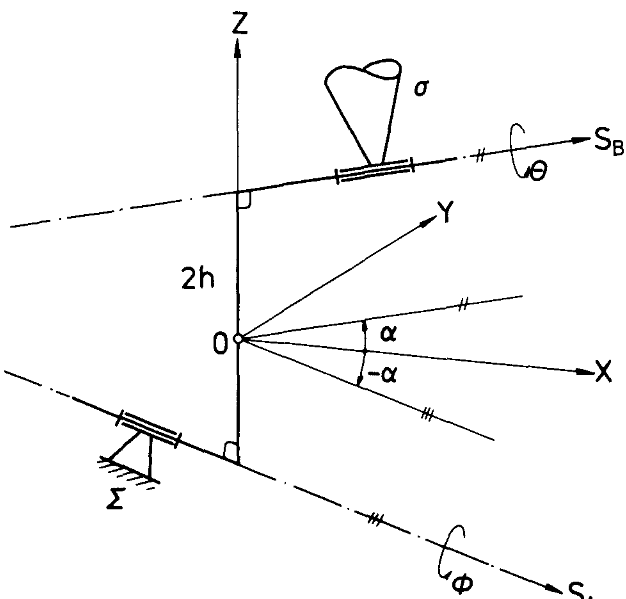

Bild 1:
Zwei-parametrige Verbindung (θ,ϕ), S_A und S_B sind windschiefe Achsen.

Bei einer Ortsänderung von σ gegenüber Σ wird die Änderung der Koordinaten eines Punktes p(x,y,z) in (X,Y,Z) durch die folgende lineare Transformation gegeben.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Hierin bedeuten die einzelnen Elemente der Übertragungsmatrix, die von den Parametern $(h,\alpha,\phi$ und $\theta)$ abhängen, wie folgt:

$$\begin{aligned} C_{11} = {} & [1 - \sin^2\alpha\,(1-\cos\phi)]\,[1-\sin^2\alpha\,(1-\cos\theta)] \\ & - \sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(1-\cos\phi)\,(1-\cos\theta) + \sin^2\alpha\sin\theta\sin\phi \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} C_{12} = {} & \sin\alpha\cos\alpha\,[1-\sin^2\alpha\,(1-\cos\phi)]\,(1-\cos\theta) \\ & - \sin\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\phi)\,[(1-\cos^2\alpha\,(1-\cos\theta)] \\ & - \sin\alpha\cos\alpha\sin\phi\sin\theta \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} C_{13} = {} & \sin\alpha\,[1-\sin^2\alpha\,(1-\cos\phi)]\sin\theta \\ & + \sin\alpha\cos^2\alpha\,(1-\cos\phi)\sin\theta - \sin\alpha\sin\phi\cos\theta \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} d_1 = {} & -h\,\{\sin\alpha[1-\sin^2\alpha\,(1-\cos\phi)]\sin\theta \\ & + \sin\alpha\cos^2\alpha\,(1-\cos\phi)\sin\theta \\ & + \sin\alpha\sin\phi\,(1-\cos\theta) + \sin\alpha\sin\phi\} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} C_{21} = {} & -\sin\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\phi)\,[1-\sin^2\alpha\,(1-\cos\theta)] \\ & + \sin\alpha\cos\alpha\,[1-\cos^2\alpha\,(1-\cos\phi)]\,(1-\cos\theta) \\ & + \sin\alpha\cos\alpha\sin\phi\sin\theta \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} C_{22} = {} & -\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(1-\cos\phi)\,(1-\cos\theta) \\ & + [1-\cos^2\alpha\,(1-\cos\phi)]\,[1-\cos^2\alpha\,(1-\cos\theta)] \\ & - \cos^2\alpha\sin\phi\sin\theta \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} C_{23} = {} & -\sin^2\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\phi)\sin\theta \\ & - \cos\alpha\,[1-\cos^2\alpha\,(1-\cos\phi)]\sin\theta - \cos\alpha\sin\phi\cos\theta \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} d_2 = {} & h\,\{\sin^2\alpha\cos\alpha\,(1-\cos\phi)\sin\theta \\ & + \cos\alpha\,[1-\cos^2\alpha\,(1-\cos\phi)]\sin\theta \\ & - \cos\alpha\sin\phi\,(1-\cos\theta) - \cos\alpha\sin\phi\} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} C_{31} = {} & \sin\alpha\,[1-\sin^2\alpha\,(1-\cos\theta)]\sin\phi \\ & + \sin\alpha\cos^2\alpha\sin\phi\,(1-\cos\theta) - \sin\alpha\cos\phi\sin\theta \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} C_{32} = {} & \sin^2\alpha\cos\alpha\sin\phi\,(1-\cos\theta) \\ & + \cos\alpha\sin\phi\,[1-\cos^2\alpha\,(1-\cos\theta)] + \cos\alpha\cos\phi\sin\theta \end{aligned} \tag{11}$$

$$C_{33} = \sin^2\alpha\sin\phi\sin\theta - \cos^2\alpha\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta \tag{12}$$

$$\begin{aligned} d_3 = {} & h\,\{-\sin^2\alpha\sin\phi\sin\theta + \cos^2\alpha\sin\phi\sin\theta \\ & + \cos\phi\,(1-\cos\theta) - (1-\cos\phi)\} \end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man hierin $\theta = \phi = 0$, so haben wir für die sog. Null-Lage die Werte

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

und

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{16}$$

wobei Index Null die Berechnung dieser Ausdrücke in der Null-Lage der Verbindung bedeuten.

2. Eigenschaften erster Ordnung

Die ersten partiellen Ableitungen der Gleichung 1 nach ϕ und θ und dem Ansatz (also Berechnung des Ausdruckes in der Null-Lage) erhalten wir:

$$\begin{bmatrix} X_{\phi 0} \\ X_{\phi 0} \\ Z_{\phi 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & -\cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} h \tag{17}$$

und

$$\begin{bmatrix} X_{\theta 0} \\ Y_{\theta 0} \\ Z_{\theta 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Da X, Y, Z die Funktionen von zwei Parametern ϕ und θ sind, so ergibt sich für den geometrischen Ort eines Punktes p (x, y, z) in σ eine Fläche. Aus den Gleichungen (17, 18) folgt, daß (X_ϕ, Y_ϕ, Z_ϕ) sind die Richtungsgrößen der Bahntangenten des Punktes p (x, y, z) während der infinitesimalen Drehung $d\phi$ um die feste Achse S_A; $(X_\theta, Y_\theta, Z_\theta)$ sind die entsprechenden Größen der Bahntangenten des gleichen Punktes infolge der infinitesimalen Drehung $d\theta$ um die bewegliche Achse S_B; und im allgemeinen die Richtung der Bahntangente ist $(X_\phi + rX_\theta, Y_\phi + rY_\theta, Z_\phi + rZ_\theta)$, wo $r = d\theta/d\phi$ ist. Aus der Veränderlichen r ergibt sich als System dieser Linien mit angegebenen Richtungen die Tangentenebene in p (x, y, z) aus dem Ausdruck

$$l(\xi - x) + m(\eta - y) + n(\zeta - z) = 0, \tag{19}$$

wo (ξ, η, ζ) die veränderliche Lage des Punktes auf der Tangentenebene bedeuten. (l, m, n) sind die Richtungsgrößen der Normalen zu dieser Tangentenebene, und diese sind wie folgt bestimmt:

$$l = Y_\theta Z_\phi - Z_\theta Y_\phi = 2\cos\alpha\,(-xz\sin\alpha + yh\cos\alpha) \tag{20}$$

$$m = Z_\theta X_\phi - X_\theta Z_\phi = 2\sin\alpha\,(-yz\cos\alpha + xh\sin\alpha) \tag{21}$$

$$n = X_\theta Y_\phi - Y_\theta X_\phi = -2\sin\alpha\cos\alpha\,(z^2 - h^2) \tag{22}$$

3. Das Zylindroid

Bezeichnen wir mit t die Zeit und nehmen $\phi = t$, so wird die Geschwindigkeit des Punktes p in σ, berechnet in der Null-Lage:

$$\begin{bmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ Z_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (r-1)\sin\alpha \\ 0 & 0 & -(r+1)\cos\alpha \\ -(r-1)\sin\alpha & (r+1)\cos\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} -(r+1)\sin\alpha \\ (r-1)\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

worin

$$X_0' = (dX/d\phi)_0,\ Y_0' = (dY/d\phi)_0,\ Z_0' = (dZ/d\phi)_0,\ r = d\theta/d\phi$$

bedeuten.

Für jeden Wert r erhält man aus der Gleichung (23) eine eindeutig definierte momentante Schraubachse. Variiert man r von Null bis Unendlich, so erfüllen die Achsen eine Regelfläche. Diese Regelfläche ist das bekannte von Cayley-Plücker angegebene Zylindroid. Für einen gegebenen Wert r ergeben sich die Richtungsgrößen (u,v,w) der entsprechenden Schraubachse. Diese Größen genügen der Beziehung

$$u:v:w = (r+1)\cos\alpha : (r-1, \sin\alpha : 0. \tag{24}$$

Aus der Gleichung (24) folgt unmittelbar, daß alle Schraubachsen der X-,Y-Ebene parallel sind.

Nur ein Punkt q (x,y,z) befindet sich nur dann auf der Schraubachse, wenn sein Geschwindigkeitsvektor der Schraubachse parallel ist. Danach erfüllen solche Punkte die folgende Beziehung:

$$X_0' : Y_0' : Z_0' = u:v:w. \tag{25}$$

Setzt man die Gleichungen (23 und 24) in (25) ein, so ergeben sich die folgenden beiden linearen Gleichungen:

$$x(r-1)\sin\alpha - y(r+1)\cos\alpha = 0, \tag{26}$$

$$z(r^2+2r\cos 2\alpha+1) - h(r^2-1) = 0. \tag{27}$$

Eliminiert man daraus r, so erhält man

$$z(x^2+y^2) = \left(\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}\right) xy. \tag{28}$$

Diese Gleichung repräsentiert den geometrischen Ort der möglichen augenblicklichen Schraubachsen.

4. Eigenschaften zweiter Ordnung

Nach der zweiten Ableitung der Gleichung (1) und Berechnung in der Null-Lage erhalten wir

$$\begin{bmatrix} X_{\phi\phi 0} \\ Y_{\phi\phi 0} \\ Z_{\phi\phi 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} X_{\theta\theta 0} \\ Y_{\theta\theta 0} \\ Z_{\theta\theta 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

und

$$\begin{bmatrix} X_{\theta\phi 0} \\ Y_{\theta\phi 0} \\ Z_{\theta\phi 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha & -\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos 2\alpha \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Da offenbar der geometrische Ort des Punktes p (x,y,z) der Ebene σ eine Fläche ist, so brauchen wir zur Berechnung der sog. Gauß'schen Krümmung zuerst die folgenden Größen [2]:

$$A_1 = X_\theta^2 + Y_\theta^2 + Z_\theta^2 \tag{32}$$

$$B_1 = X_\theta X_\phi + Y_\theta X_\phi + Z_\theta Z_\phi \tag{33}$$

$$C_1 = X_\phi^2 + Y_\phi^2 + Z_\phi^2 \tag{34}$$

$$D_1 = A_1 C_1 - B_1^2 \tag{35}$$

$$A_2 = lX_{\theta\theta} + mY_{\theta\theta} + nZ_{\theta\theta} \tag{36}$$

$$B_2 = lX_{\theta\phi} + mY_{\theta\phi} + nZ_{\theta\phi} \tag{37}$$

$$C_2 = lX_{\phi\phi} + mY_{\phi\phi} + nZ_{\phi\phi} \tag{38}$$

$$D_2 = A_2 C_2 - B_2^2 \tag{39}$$

worin l, m und n durch die Gleichungen (20,22) gegeben sind. Dann lautet die Krümmung im Punkte p

$$K = \frac{D_2}{D_1}. \tag{40}$$

Setzt man die Gleichungen (17,18) in die Gleichungen (23–25) ein, so erhalten wir, in der Null-Lage:

$$A_1 = (x \sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + (z-h)^2 \tag{41}$$

$$B_1 = -x^2 \sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha + (z^2-h^2)\cos 2\alpha \tag{42}$$

$$C_1 = (x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + (z+h)^2 \tag{43}$$

$$\begin{aligned} D_1 = {} & z^2(x^2+y^2+z^2)\sin^2 2\alpha - 4xyzh\sin 2\alpha + 4h^2(x^2\sin^4\alpha \\ & + y^2\cos^4\alpha - 2z^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) + h^4\sin^2 2\alpha. \end{aligned} \tag{44}$$

Weiterhin ergeben sich durch die Einsetzung der Gleichungen (29–31) in die Gleichungen (36–39), reduziert auf die Null-Lage:

$$A_2 = \sin 2\alpha\,(z+h)\,[(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + (z-h)^2] \tag{45}$$

$$B_2 = \sin 2\alpha\,(z-h)\,[-x^2\sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha + (z^2-h^2)\cos 2\alpha] \tag{46}$$

$$C_2 = \sin 2\alpha\,(z-h)\,[(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + (z+h)^2] \tag{47}$$

$$D_2 = \sin^2 2\alpha\,(z-h)\,F(x,y,z), \tag{48}$$

worin

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = {} & 2h\,(x^2\sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha)^2 + (z+h)\,[(z+h)^2(x\sin\alpha - y\cos a)^2 \\ & + (z-h)^2(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + 2\,(z-h)^2(x^2\sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha)\cos 2\alpha] \\ & + (z^2-h^2)^2\,[z+h-(z-h)\cos^2 2\alpha] \end{aligned} \tag{49}$$

bedeutet.

Eine Umschreibung der obigen Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = {} & z^3(x^2+y^2+z^2)\sin^2 2\alpha + 2h\,[(x^2\sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha)^2 \\ & + z^4(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) + 2z^2(x^2\sin^4\alpha + y^2\cos^4\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha)] \\ & + 4h^2z\,(x^2\sin^4\alpha + y^2\cos^4\alpha - 2xy\sin\alpha\cos\alpha - 2z^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) \\ & + 2h^3\,[2(x^2+y^2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha - z^2(1+\cos^2 2\alpha)] \\ & + h^4z\sin^2 2\alpha + h^5(1+\cos^2 2\alpha). \end{aligned} \tag{50}$$

Es ist hierbei zu bemerken, daß der geometrische Ort der Punkte mit Null-Krümmung in der Null-Lage durch die Nullsetzung der Gleichung (48) gegeben ist:

$$D_2 = \sin^2 2\alpha\,(z-h)\,F(x,y,z) = 0. \tag{51}$$

Dies entspricht dem Wendekreis der ebenen Bewegung, d.h. die Gleichung (51) stellt die möglichen parabolischen Punkte der beweglichen Ebene σ. Daraus folgt das folgende Ergebnis: Der geometrische Ort der parabolischen Punkte dieser momentanen Bewegung besteht aus einer Ebene $z-h=0$ und einer Fläche $F(x,y,z)=0$, also eine Fläche fünfter Ordnung. Das Glied fünften Grades dieser Fläche ist gegeben durch den Ausdruck $z^3(x^2+y^2+z^2)\sin^2 2\alpha$.

Daraus folgt, daß $F(x,y,z)=0$ enthält die isotropische Kegel und XY-Ebene durchdringt dreimal im Unendlichen. Im allgemeinen schneidet eine Ebene die Fläche $F=0$ an einer Kurve fünfter Ordnung. Jedoch eine parallele Ebene zur XY-Ebene, d.h. $z=c$ durchdringt die Fläche $F=0$ längs einer Kurve vierter Ordnung. Wir bezeichnen diese Kurve mit $G(x,y)=0$. Aus der Gleichung (49) folgt

$$\begin{aligned} G(x,y) = {} & 2h\,(x^2\sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha)^2 + (c+h)\,[(c+h)^2(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 \\ & + (c-h)^2(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + 2(c-h)^2(x^2\sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha)\cos 2\alpha] \\ & + (c^2-h^2)^2\,[c+h-(c-h)\cos^2 2\alpha], \end{aligned} \tag{52}$$

wobei

$$x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$$

die asymptoten Geraden dieser Linie sind. Für $c=h$ erhalten wir aus Gleichung (52):

$$G(x,y) = 2h\,(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2\,[x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + (2h)^2] = 0. \tag{53}$$

Daraus ersieht man, daß die Kurve $G(x,y)=0$ (eine Kurve vierter Ordnung) entartet in $x\sin\alpha - y\cos\alpha = 0$, also eine doppelzählende Gerade in einer imaginären Parabel $(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + (2h)^2 = 0$. Ähnlich gilt für $c=-h$, d.h. $G(x,y)=0$ entartet in zwei Geraden

$$\begin{aligned} G(x,y) &= 2h\,(x^2\sin^2\alpha - y^2\cos^2\alpha)^2 \\ &= 2h\,(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2(x\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Wir bemerken, daß sowohl das Zylindroid als auch die vorgenannte Fläche nur von den augenblicklichen invarianten Größen h und α abhängen.

5. Sonderfälle

Im Falle paralleler Achsen wird $\alpha=0$. Daraus ergibt sich aus der Gleichung (23)

$$\begin{bmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ Z_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,0 & 0 \\ 0\,0 & -(r+1) \\ 0\,(r+1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ r-1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Die dazu entsprechenden Punkte des beweglichen Systems gelten $X_0' = 0$. Im Falle der zweiparametrigen ebenen Bewegung erhalten wir aus (24)

$$u:v:w = (r+1):0:0. \tag{56}$$

Daraus erfolgt naturgemäß, daß alle Achsen parallel zur X-Achse sind und zwar für alle Werte von r. Außerdem folgen aus den Gleichungen (26,27), daß der geometrische Ort dieser Achsen durch die Gleichungen

$$z = \frac{r-1}{r+1}\,h, \quad y = 0 \tag{57}$$

gegeben ist. d.h., das obengenannte Zylindroid entartet in die XZ-Ebene [1].
Die Gauß'sche Krümmung ist ständig Null für alle Punkte der Ebene σ, da D_2 identisch Null ist. Das ist selbstverständlich infolge der ebenen Bewegung. Die Bahnkurven des Punktes p (x,y,z) sind der XZ-Ebene parallel. Daher ist die Gauß'sche Krümmung für alle Zeiten gleich Null.

Im Falle sich schneidender Achsen wird $h = 0$, und aus der Gleichung (23) folgt:

$$\begin{bmatrix} X_0' \\ Y_0' \\ Z_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (r-1)\sin\alpha \\ 0 & 0 & -(r+1)\cos\alpha \\ -(r-1)\sin\alpha & (r+1)\cos\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Die Gleichung (24) erhält ihre Form, d.h. die Schraubachse ist stets parallel der XY-Ebene. Die Gleichung (26) bekommt die Form $z = 0$ für alle Werte von r; diese Achse geht durch den Ursprung 0 mit dem Winkel ψ, der durch den Ausdruck gegeben ist:

$$z = 0, \tag{59}$$

wie in Bild 2 dargestellt.

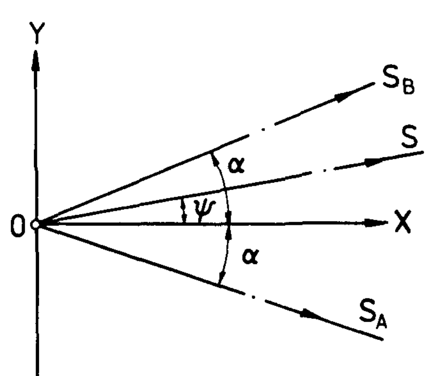

Bild 2:
Die Schraubachsen gehen durch den Punkt 0. $\psi = \tan^{-1}\left((r-1)\sin\alpha\,/\,(r+1)\cos\alpha\right)$.

Variiert man r von Null bis Unendlich, so überdeckt der geometrische Ort der Schraubachsen XY-Ebene. Die Gleichung (40) reduziert sich in

$$K = \frac{z^4 (x^2 + y^2 + z^2) \sin^4 2\alpha}{[z^2 (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 2\alpha]^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \ . \tag{60}$$

Daraus folgt, daß keine parabolischen Punkte existieren. Das ist der Fall der zweiparametrigen sphärischen Bewegung.

Literatur

[1] Dizioğlu, B.: Die kinematische Geometrie der allgemein-räumlichen Relativbewegung von drei Gliedern. Forschung im Ingenieurwesen, VDI-Verlag Düsseldorf, 1986.

[2] Blaschke-Leichtweiß: Elementare Differentialgeometrie. 5. Auflage, Springer-Verlag Berlin, 1973.